3.1 – 3.9

ΘΕΩΡΙΑ

1.
Στοιχεία τριγώνου

Κύρια στοιχεία : Πλευρές και γωνίες

Δευτερεύοντα στοιχεία : Διάμεσος , διχοτόμος , ύψος

2.
Είδη τριγώνων

Ως προς τις πλευρές : Σκαληνό , ισοσκελές , ισόπλευρο.

Ως προς τις γωνίες : Οξυγώνιο , ορθογώνιο , αμβλυγώνιο.

3.
Κριτήρια ισότητας τριγώνων

1^o : Π – Γ– Π

2^o : Γ – Π – Γ

3^o : Π – Π – Π

* Γ – Γ – Γ δεν είναι κριτήριο

* Π – Π – Γ δεν είναι κριτήριο

* Γ – Γ – Π δεν είναι κριτήριο

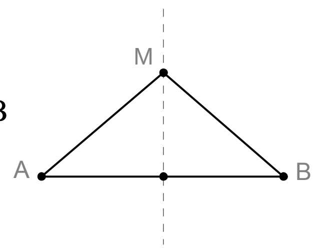
4.
Ισοδυναμίες

i) $\beta = \gamma \Leftrightarrow \hat{B} = \hat{\Gamma}$ (ισοσκελές)

ii) $\alpha = \beta = \gamma \Leftrightarrow \hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma}$ (ισόπλευρο)

iii) MA = MB $\Leftrightarrow$ το M ανήκει στη μεσοκάθετο του AB

* Η μεσοκάθετος είναι γεωμετρικός τόπος

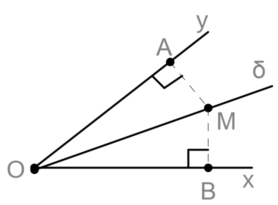


iv) $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow AB = \Gamma\Delta$ (τα δύο τόξα είναι $\leq 180^o$ ή $\geq 180^o$)

v) Ίσες χορδές $\Leftrightarrow$ Ίσα αποστήματα

vi) MA = MB $\Leftrightarrow$ το M ανήκει στη διχοτόμο

* Η διχοτόμος είναι γεωμετρικός τόπος



5.

Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων

1ο : Τα τρία κριτήρια ισότητας τριγώνων
2ο : Ίση υποτείνουσα και ίση μία οξεία γωνία
3ο : Ίση υποτείνουσα και ίση μία κάθετη πλευρά

6.

Πολυθεώρημα

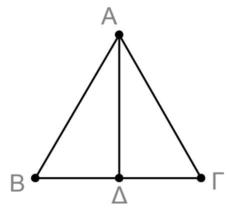
Για το τρίγωνο ΑΒΓ θεωρούμε τις προτάσεις

α) ΑΒ = ΑΓ

β) ΑΔ ύψος

γ) ΑΔ διάμεσος

δ) ΑΔ διχοτόμος



Αν ισχύουν δύο από τις τέσσερις τότε θα ισχύουν και οι υπόλοιπες

7.

Θεώρημα

Τα συμμετρικά σχήματα, είτε ως προς κέντρο είτε ως προς άξονα, είναι ίσα.

8.

Σχόλιο 1

Στην έκφραση : « Δίνεται τρίγωνο ………………..», σχεδιάζουμε σκαληνό τρίγωνο και όχι ισοσκελές ή ορθογώνιο ή ισόπλευρο.

9.

Σχόλιο 2

Η ισότητα τριγώνων προσφέρεται για την απόδειξη ίσων τμημάτων και ίσων γωνιών.

10.

Σχόλιο 3

Όταν έχουμε κάθετη σε διχοτόμο, προεκτείνουμε την κάθετη κατά ίσο τμήμα, οπότε δημιουργείται ισοσκελές τρίγωνο.

11.

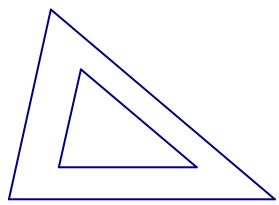
Σχόλιο 4

Κατά τη διαδικασία επίλυσης μιας άσκησης :

i. κατασκευάζουμε ένα, όσο το δυνατόν, πειστικό σχήμα
ii. εντοπίζουμε τις υποθέσεις και το ζητούμενο
iii. προσπαθούμε να βγάλουμε συμπεράσματα από τις υποθέσεις

iv. πολλές φορές σκεπτόμαστε αντίστροφα, με το αρκεί να δειχθεί ότι.

12.
Σχόλιο 5

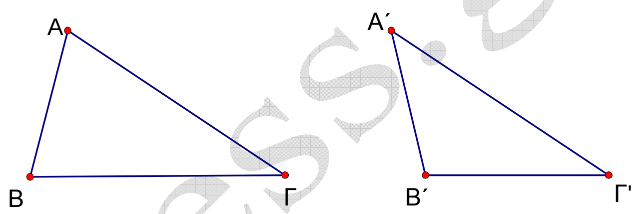


Είναι γνωστό ότι αν δύο τρίγωνα είναι ίσα, τότε έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία.

Όπως, όμως, φαίνεται στο σχήμα, δεν ισχύει το αντίστροφο. Δηλαδή, αν δύο τρίγωνα έχουν ίσες γωνίες δε σημαίνει ότι είναι ίσα. Στο κεφάλαιο 8 θα μάθουμε ότι είναι όμοια.

13.
Σχόλιο 6

Στο σχήμα παρουσιάζουμε δύο άνισα τρίγωνα που έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία (ΑΒ = Α΄Β΄ και ΑΓ = Α΄Γ΄) και μη περιεχόμενη γωνία ίση ($\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$).



Γι' αυτό η αντίστοιχη πρόταση δεν αποτελεί κριτήριο ισότητας τριγώνων.

14.
Σχόλιο 7

Σε κάθε θέμα γεωμετρικού τόπου πρέπει διακρίνουμε τα σταθερά από τα μεταβλητά στοιχεία.

15.
Να θυμόμαστε τις ισοδυναμίες

- ΟΜ = ρ $\Leftrightarrow$ το Μ ανήκει στον κύκλο (Ο, ρ)
- ΜΑ = ΜΒ $\Leftrightarrow$ το Μ ανήκει στη μεσοκάθετο του τμήματος ΑΒ
- Σημείο Μ ισαπέχει από τις πλευρές γωνίας $\Leftrightarrow$ το Μ ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας

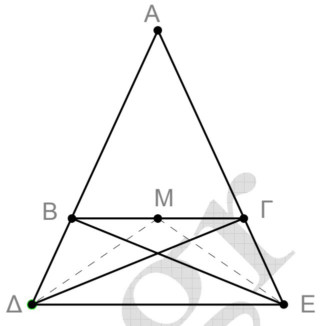
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Στις προεκτάσεις των ίσων πλευρών ΑΒ και ΑΓ θεωρούμε σημεία Δ και Ε αντίστοιχα, έτσι ώστε ΒΔ = ΓΕ

i) Δείξτε ότι ΔΓ = ΒΕ

ii) Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ, δείξτε ότι ΜΔ = ΜΕ



Λύση

i)

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΓΔΒ και Β Γ Ε

Έχουν ΒΓ κοινή

ΒΔ = ΓΕ

$\Delta\hat{B}\Gamma = E\hat{\Gamma}B$ σαν παραπληρωματικές ίσων

Οπότε σύμφωνα με το κριτήριο Π – Γ – Π, τα τρίγωνα είναι ίσα, άρα ΔΓ = ΒΕ

ii)

Συγκρίνω τα τρίγωνα ΜΔΒ και ΜΓΕ

Έχουν ΒΜ = ΜΓ

ΒΔ = ΓΕ

$\Delta\hat{B}\Gamma = E\hat{\Gamma}B$

Οπότε σύμφωνα με το κριτήριο Π – Γ – Π, τα τρίγωνα είναι ίσα, άρα ΔΜ = ΜΕ

2.

Έστω γωνία $X\hat{O}\Psi$.

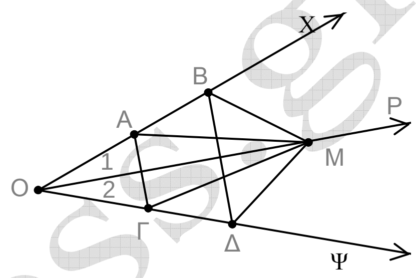
Στις πλευρές ΟΧ και ΟΨ γωνίας $X\hat{O}\Psi$ θεωρούμε σημεία Α, Β και Γ, Δ αντίστοιχα, έτσι ώστε ΟΑ = ΟΓ και ΟΒ = ΟΔ. Αν Μ είναι τυχαίο σημείο της διχοτόμου ΟΡ της γωνίας $X\hat{O}\Psi$, δείξτε ότι

i) Τα τρίγωνα ΟΒΜ, ΟΔΜ είναι ίσα

ii) Τα τρίγωνα ΜΑΒ, ΜΓΔ είναι ίσα

iii) Η ΟΡ είναι μεσοκάθετος των τμημάτων Α Γ και Β Δ .

Λύση



i) Τα τρίγωνα ΟΒΜ, ΟΜΔ
έχουν ΟΒ = ΟΔ
ΟΜ κοινή
$\hat{O}_1 = \hat{O}_2$
Άρα είναι ίσα

ii)
Τα τρίγωνα ΜΑΒ, ΜΓΔ έχουν ΑΒ = ΓΔ σαν διαφορές ίσων
ΜΒ = ΜΔ συμπέρασμα από το (i)
$O\hat{B}M = O\hat{\Delta}M$ συμπέρασμα από το (i)
Άρα είναι ίσα

iii)
Επειδή τα τρίγωνα ΟΑΓ και ΟΒΔ είναι ισοσκελή (ΟΑ = ΟΓ, ΟΒ = ΟΔ), η διχοτόμος ΟΡ θα είναι μεσοκάθετος των βάσεων ΑΓ και ΒΔ.

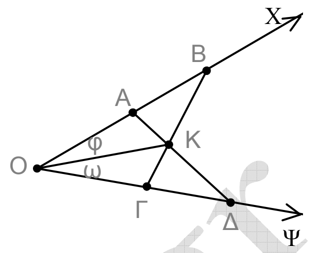
3.

Έστω γωνία $X\hat{O}\Psi$, δύο σημεία Α και Β στην ΟΧ και δύο σημεία Γ και Δ στην ΟΨ, έτσι ώστε ΟΑ = ΟΓ και ΟΒ = ΟΔ.

Δείξτε ότι το σημείο τομής των ΒΓ και ΑΔ ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $X\hat{O}\Psi$.

Λύση

Έστω Κ το σημείο τομής των ΒΓ, ΑΔ. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η ΟΚ είναι διχοτόμος της γωνίας $X\hat{O}\Psi$.



Τα τρίγωνα ΟΒΓ, ΟΑΔ

έχουν ΟΑ = ΟΓ

ΟΒ = ΟΔ

$X\hat{O}\Psi$ κοινή

Άρα είναι ίσα, επομένως $O\hat{A}\Delta = O\hat{\Gamma}B$ και $\hat{B} = \hat{\Delta}$

Τα τρίγωνα ΑΚΒ, ΓΚΔ

έχουν ΑΒ = ΓΔ σαν διαφορές ίσων

$\hat{B} = \hat{\Delta}$ αποδείχτηκε παραπάνω

$K\hat{A}B = K\hat{\Gamma}\Delta$ σαν παραπληρώματα ίσων γωνιών

Άρα είναι ίσα, επομένως Α Κ = ΚΓ

Τα τρίγωνα ΟΑΚ, ΟΚΓ είναι ίσα

διότι ΟΑ = ΟΓ

ΟΚ κοινή

ΑΚ = ΚΓ αποδείχτηκε

Οπότε ω = φ, συνεπώς η ΟΚ είναι διχοτόμος της γωνίας $X\hat{O}\Psi$.

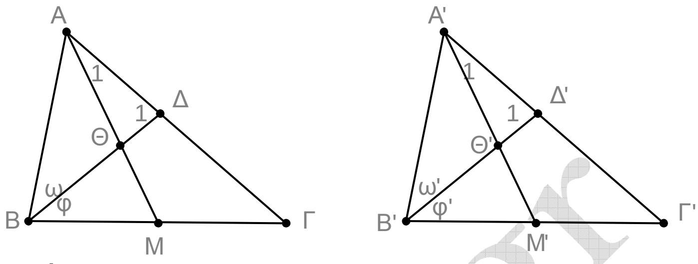
4.

Έστω δύο ίσα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ (α = α΄, β = β΄, γ = γ΄). Η διάμεσος ΑΜ και η διχοτόμος ΒΔ του ΑΒΓ τέμνονται στο Θ, ενώ η διάμεσος Α΄Μ΄ και η διχοτόμος Β΄Δ΄ του Α΄Β΄Γ΄ τέμνονται στο Θ΄. Δείξτε ότι

i) Θ Δ = Θ΄ Δ΄

ii) ΘΜ = Θ΄Μ΄

Λύση



i)

Τα τρίγωνα ΑΒΔ και Α΄ Β΄Δ΄ έχουν ΑΒ = Α΄Β΄

$\widehat{A} = \widehat{A}'$

ω = ω΄ σαν μισά ίσων γωνιών

Άρα είναι ίσα, οπότε $\widehat{\Delta_1} = \widehat{\Delta_1'}$ και ΑΔ = Α΄Δ΄

Τα τρίγωνα ΑΜΓ και Α΄Μ΄Γ΄ έχουν ΑΓ = Α΄Γ΄

$\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma}'$

ΜΓ = Μ΄Γ΄ σαν μισά ίσων

Άρα είναι ίσα, οπότε $\widehat{A_1} = \widehat{A_1'}$

Τα τρίγωνα ΑΘΔ και Α΄Θ΄Δ΄ είναι ίσα διότι ΑΔ = Α΄Δ΄ αποδείχτηκε παραπάνω

$\widehat{\Delta_1} = \widehat{\Delta_1'}$ »

$\widehat{A_1} = \widehat{A_1'}$ »

Οπότε θα είναι ΑΘ = Α΄Θ΄ **(1)**

ii)

Από Π – Γ – Π είναι τρ. ΑΜΓ = τρ. Α΄Μ΄Γ΄, άρα ΑΜ = Α΄Μ΄ **(2)**

(2) – (1) $\Rightarrow$ ΘΜ = Θ΄Μ΄

5.

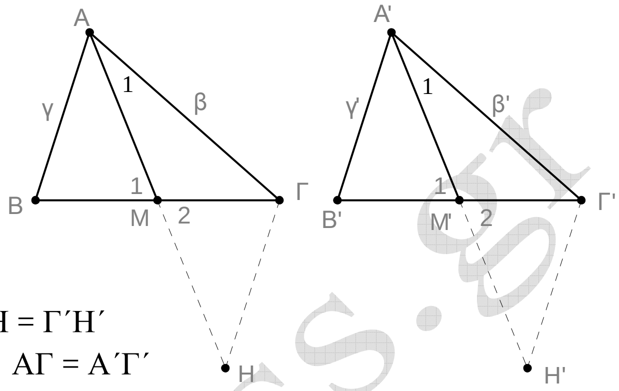
Δείξτε ότι δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι ίσα, όταν β = β΄ , γ = γ΄ , $\mu_\alpha = \mu_{\alpha'}$

Λύση

Επειδή με βάση τα δεδομένα δεν βρίσκουμε τρίγωνα που να είναι ίσα, κάνουμε το εξής τέχνασμα :

Προεκτείνουμε τις δοσμένες διαμέσους κατά μήκος ίσο με τον εαυτό τους

Έτσι λοιπόν προεκτείνουμε την ΑΜ κατά τμήμα ΜΗ = ΑΜ και την Α΄Μ΄ κατά τμήμα Μ΄Η΄= Α΄Μ΄.



Είναι τρ.ΑΜΒ = τρ.ΜΓΗ

διότι ΒΜ = ΜΓ

ΑΜ = ΜΗ

$\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$

Οπότε θα είναι και ΓΗ = ΑΒ

Ομοίως θα είναι Α΄Β΄= Γ΄Η΄

Και αφού Α΄Β΄ = ΑΒ, θα είναι ΓΗ = Γ΄Η΄

Είναι τρ.ΑΓΗ = τρ.Α΄Γ΄Η΄ διότι ΑΓ = Α΄Γ΄

ΓΗ = Γ΄Η΄

ΑΗ = Α΄Η΄

Οπότε θα είναι και $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_1{}'$

Είναι τρ.ΑΜΓ = τρ.Α΄Μ΄Γ΄ διότι ΑΓ = Α΄Γ΄

ΑΜ = Α΄Μ΄

$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_1{}'$

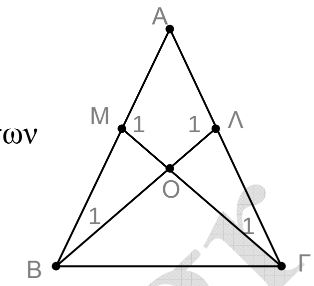
Οπότε θα είναι και ΜΓ = Μ΄Γ΄ και συνεπώς ΒΓ= Β΄Γ΄.

Τελικά, από Π – Π – Π θα είναι τρ.ΑΒΓ = τρ.Α΄Β΄Γ΄

6.

Έστω ένα τρίγωνο ΑΒΓ και ένα σημείο Ο στο εσωτερικό αυτού. Οι ΒΟ, ΓΟ τέμνουν τις ΑΓ, ΑΒ στα σημεία Λ, Μ αντίστοιχα, έτσι ώστε να ισχύει ΟΒ = ΟΓ και ΟΛ = ΟΜ. Δείξτε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές .

Λύση



Από Π – Γ – Π έχουμε τρ.ΟΜΒ = τρ.ΟΛΓ,

οπότε θα είναι $\widehat{B}_1 = \widehat{\Gamma}_1$ και $\widehat{M}_1 = \widehat{\Lambda}_1$ ως παραπληρώματα ίσων

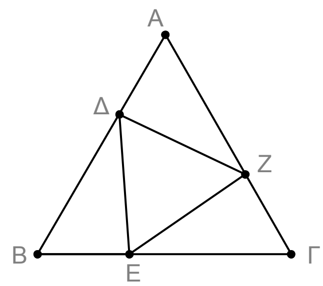
Από Γ – Π – Γ έχουμε τρ.ΑΜΓ = τρ.ΑΛΒ,

οπότε είναι ΑΒ = ΑΓ

7.

Στις πλευρές ΑΒ , ΒΓ, ΓΑ ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε αντίστοιχα τα σημεία Δ, Ε, Ζ ώστε να είναι ΑΔ = ΒΕ = ΓΖ. Δείξτε ότι το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ισόπλευρο.

Λύση



Είναι τρ.ΑΔΖ = τρ.ΒΔΕ διότι ΑΔ = ΒΕ

ΑΖ = ΒΔ

$\widehat{A} = \widehat{B}$

Άρα θα έχουν τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα,

επομένως και ΔΖ = ΔΕ.

Ομοίως ΔΖ = ΕΖ